まえがき

本書は、筆者がこれまで研究してきた成果をまとめたものです。その目的は非線形制御問題の基盤となる設計理論を構築することです。そのために、安定化制御法とアフィン非線形写像による線形化法を提案しています。

安定化制御法は、多項式型非線形系の安定化に関する研究から生まれたものです。極配置法も安定化制御法の一つですが、応答特性を考慮した安定化制御も線形化した系に適用することで、設計も容易になり有効な制御法になると考えられます。特に、本書では Lyapunov の直接法に基づく安定化制御に焦点を当て、最適制御とほぼ同等の制御測が得られることを示しました。これは制御理論の統一に寄与するものと考えられます。この安定化制御を“ 最適な安定化制御 ”と呼びます。

アフィン非線形写像は、アフィン写像型の滑らかな非線形写像であり、$M \subset \boldsymbol{R}^n$ から $N \subset \boldsymbol{R}^n$ への C^γ 級局所微分同相写像です。ここで、M は n 次元局所ユークリッド的位相空間で、可微分構造を導入した n 次元可微分多様体として扱います。この写像を用いることで、非線形系を線形系に線形化し、最適な安定化制御やロバスト制御、H^∞ 制御などの制御法を適用できます。加えて、線形化法は解析が容易になる利点があります。本書は、筆者の研究内容に限定して述べてあります。

終わりに、私の師と仰ぐ京都大学工学部 (故) 得丸英勝博士に深く感謝申し上げます。そして、本書の出版にあたり尽力してくださいました (株) 大学教育出版の佐藤守社長と同社社員の皆様にも感謝申し上げます。

新訂版　非線形制御工学

目　　次

第1章　序論

本書は、大きく分けて多項式形非線形制御系の設計理論と非線形制御系の設計理論の二部構成になっている。多項式形非線形制御理論はテンソル記法を用いて述べてある。その理由は、テンソルは多重線形写像であって、行列多項式で表されている非線形系を線形的に取り扱うことができること、テンソルを行列表現することによって解析や設計が明快で簡潔になることである。そして文中で取り扱っているのは主として非線形レギュレータ問題である。それは、この問題が現代制御理論の基礎をなすものであると考えるからである。

線形レギュレータ問題は、最適制御理論を適用して解かれている。最適制御理論の基礎となるものは最大原理であり、Pontoryagin たちは変分的方法で、Bellman は最適性の原理を用いて導いている。最適制御理論は非線形系にも適用できるので、これを非線形レギュレータ問題[1)〜8)]に応用する試みがなされてきた。しかし、一般に解析的な解を得ることは困難で[1)〜3)]、解析的な解を得るためには非線形部に何らかの制限[4)〜8)]をもうけるか、線形化[43)〜45)]するのが実状である。多項式形非線形系も非線形部に制限をもうける方法の一つである。非線形系の最適制御問題は、評価関数の設定や解析的な解を得ることが難しいので、ここでは、次の三つの制御法を提案している。その一つは Lyapunov の安定論に基づいて制御則を導く安定化制御法である。この方法を Lyapunov の直接法に基づく安定化制御法とよぶことにする。もう一つの方法は、v 関数を状態変数によって構成し、その v 関数の応答特性によって状態変数一般化ノルム自乗の応答特性を知ることができる。これによって、応答特性を考慮に入れた設計が可能

になり、系の安定化もできる。この方法を応答特性に基づく安定化制御法とよぶことにする。さらに、もう一つの方法は系が可安定でなくても、できるだけ広範囲の安定領域が得られるような制御則を決定する方法で、局所的漸近安定である系であれば必ず制御則が求まる特長がある。これを 局所安定化制御法とよぶことにする。

本書では、テンソル成分をある規則に基づいて配列することによって行列を構成し、その行列を使用して演算を行っている。以後、この行列のことをテンソル行列とよぶことにする。

非線形制御理論では、本書の特徴である不連続非線形制御理論を中心に述べてある。従来、微分幾何学的な設計法として”厳密な線形化法”[43)〜45)]があるが、Lie 代数で構造を入れた微分可能多様体上で理論が構成されているため、系が不連続要素を含んでいたり、接分布が対合的でない場合は適用できない。そのため、本書では不可積分系や不連続系でも、不連続要素が区分連続で有界な関数で表されるならば局所的線形化が可能な局所微分同相写像を提案している。この写像を—適切な言葉でないかもしれないが—アフィン非線形写像とよぶことにする。

本書で提案している主な理論は次の二つである。

(1)　アフィン非線形写像とその写像による線形化法

(2)　安定化制御法

アフィン非線形写像とは、アフィン写像型の滑らかな非線形写像である(Dini 微分可能な連続写像でもよい)。このアフィン非線形写像によって線形化された系で最適な安定化制御、ロバスト制御、H^∞ 制御等の設計ができる。安定化制御法は従来は極配置法が用いられていたが、Lyapunov の直接法を用いた最適な設計法を提案している。

1.1　概要

第 2 章 テンソル記法を用いた場合の演算に関する命題を示してある。

第 3 章では微分幾何学的な方法による非線形系の可制御・可観測性につ

いて述べてある。ここでは可制御・可観測判定条件 (階数条件) の 導出過程に重きを置いて述べている、可制御階数条件については反変ベクトルの方向微分から判定条件を導いている。可観測階数条件は接空間の双対空間 (余接空間) で考察することによって、その導出が簡明になることを示した。

第 4 章では多項式形非線形系の最適制御について述べてある。ここでは Bellman の最適性の原理を用いて最適制御則を求める方法を示しているが、本書では最適制御則を導くのが目的ではなく、第 6 章以降で述べる 2 つの安定化制御法を提案するのが目的である。

第 5 章では非線形系の安定領域の決定方法を示した。Zubov の微分方程式は完全解が得られる場合は、$v\ = 1$ とおくことによって安定限界局面が得られるが、完全解が得られない場合は近似級数解で求めなければならない。この場合、級数展開を途中で打切ると $v \leqq 1$ で示される状態空間の部分集合が安定領域であるという保証はなくなり、しかも v 関数の次数を大きくしてもより広範囲の安定領域が得られるとは限らない。そして、Zubov 方程式を解く上での最大の難点は ψ 関数を先験的に定めなければならないということである。ここでは、Zubov の方法を基にして低次元の v 関数を使って、$v-1=0$ なる閉曲面が $\dot{v}=0$ なる超曲面に内接するように v 関数の係数を定めることによって、ψ 関数と v 関数を同時に求める方法を示した。そして、級数解はテンソル行列を用いて導かれている。

第 6 章では、安定化制御法の提案をしている。従来の最適制御法では評価関数に基づいて最適制御則を決定するのであるが、評価関数の設定の仕方に問題が残されており、また系の応答特性を陽に制御できない難点がある。本書では評価関数を用いることなく系の安定性と状態変数の応答特性を考慮に入れた安定化制御法について述べてある。第 6．2 節で述べた方法を Lyapunov の直接法に基づく安定化制御法、第 6．3 節で述べた方法を応答特性に基づく安定化制御法とよぶことにする。第 6．4 節では局所安定化制御法について述べた。非線形最適制御は系を大域漸近安定ならしめるような制御則を決定する方式になっており、対象となる系は可安定でなければならない。しかし、系が可安定でない場合でも系の線形部が可安定であ

るならば、できるだけ広範囲の局所安定領域が得られるように制御則を決定することは可能である。ここでは、その局所安定化制御則を Zubov の微分方程式を用いて求める方法と状態空間を可制御部分空間と不可制御部分空間に分け、可制御部分空間で安定化制御則を求める方法を示した。これによって、制御則と安定領域を同時に求めることができる。第 6．5 節では安定化制御法の応用例について述べた。

第 7 章では、不完全状態観測に基づく応答速度の速い非線形レギュレータの構成について述べてある。従来の状態観測器を用いた非線形レギュレータに関する研究では単に状態量を推定量で置き換えただけで、推定値が真値に近づくまでの系の動作や過渡特性についての検討がなされていない。ここでは、これらの問題を解決するために状態観測器の状態変数に代わる補助状態変数を導入し、応答特性を考慮した非線形レギュレータの構成法を示してある。これは第 6．3 節で述べた制御方法を用いて、v 関数を状態変数と状態偏差の 2 次形式の和で表して、Lyapunov の直接法を用いる代わりに v 関数の応答特性を調べることにより、安定性と応答特性を考慮に入れた制御則の決定方法を示したものである。

第 8 章では入力信号合成法による適応的安定化制御について述べてある。ここでは非線形適応制御問題を非線形レギュレータ問題の拡張として捉え、安定化制御法をもちいて拡張誤差や正実性の概念を要しない簡潔な設計理論を導いている。第 9 章は非ホロノーミック・レオノーミック系について述べてある。ここでは Boltzmann—Hamel 運動方程式を散逸力学系にまで拡張している。第 10 章は、微分可能多様体上で、非線形制御系の設計理論について述べてある。ここではアフィン非線形写像によって接分布が対合的でない系でも局所的線形化が可能であることを示してある。第 11 章では、不連続非線形制御系の設計理論について述べてある。この設計法は 、厳密な線形化法が Lie 微分を使って線形化を行うのに対して、代数演算と Lebesgue 積分によって系を線形化する方法を提案している。これによって不連続非線形関数は滑らかな関数になって微分可能多様体上で取り扱えるようになり、非線形関数が多価関数の場合は積分多様体を葉層構造にして、

その葉の上で解析できる。このことから、本書では非線形関数は一価関数と仮定している。第 12 章では、最近、ディジタル制御が多く使われているので離散時間不連続非線形制御系の設計理論について述べている。

1.2　用語の説明

n 次元多様体とは、Hausdorff 空間 M の各点 $\forall p \in M$ の開近傍が n 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ の開集合と同相であることをいう。このことから、n 次元多様体は局所コンパクト空間であり、第二可算公理を満たすものとしてパラコンパクト空間とする。これによって距離付けが可能となる。この多様体は位相多様体とも呼ばれ、可微分構造が入った位相多様体を微分可能多様体または可微分多様体という。すなわち Λ を添数集合として、M の開集合の族 $\{(U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ と各 U_α において定義された実数空間 $\boldsymbol{R}^n$ への写像 $\boldsymbol{\psi}_\alpha$ が与えられて、次の条件が満たされるとき、$\{(U_\alpha, \boldsymbol{\psi}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ は M に微分可能多様体の構造を入れるといい、$(U_\alpha, \boldsymbol{\Psi}_\alpha)$ を座標近傍、$\{(U_\alpha, \boldsymbol{\psi}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ を M 上の座標近傍系という。

(1) $M = \cup_{\alpha\in\Lambda} U_\sigma$

(2) $\boldsymbol{\psi}_\alpha$の像$\boldsymbol{\psi}_\alpha(U_\alpha)$ は $\boldsymbol{R}^n$の開集合で

$$\boldsymbol{\psi}_\alpha : U_\alpha \to \boldsymbol{\psi}_\alpha(U_\alpha)$$

は位相同型写像である。

(3) $U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta} \neq \varnothing$であるとき$\boldsymbol{\psi}_\alpha \boldsymbol{\psi}_\beta^{-1}$は開集合$\boldsymbol{\psi}_\beta(U_{\alpha\beta})$ から $\boldsymbol{\psi}_\alpha(U_{\alpha\beta})$ への C^∞同型写像である。

すなわち C^∞ 連続微分可能な全単射写像である。$\boldsymbol{\psi}_\alpha \boldsymbol{\psi}_\beta^{-1}$ が解析的であるならば M を解析多様体という。

M 上の曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ が与えられ、f が M 上の点 p の近傍 U_p で定義された

C^∞ 関数であるとき

$$\boldsymbol{X}(f) = \left(\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{x}(t))\right)_{t=t_0}$$

と表して、$\boldsymbol{X}$ を曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ の接ベクトルと定義する。多様体 M 上の点 p における 2 つの接ベクトル $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ と実数 a について

$$(a\boldsymbol{X})(f) = a(\boldsymbol{X}(f))$$
$$(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y})f = \boldsymbol{X}f + \boldsymbol{Y}f$$

と定義することにより、点 p における接ベクトルの全体は実ベクトル空間となる。この実ベクトル空間のことを点 p における接 (ベクトル) 空間といい、$T_p(M)$ で表す。この接 (ベクトル) 空間上の線形汎関数 $\boldsymbol{\varPhi}_p$ を M 上の点 p における双対 (余接) ベクトルといい、そのベクトル全体が張る空間を双対 (余接) 空間という。点 p で接ベクトル $\boldsymbol{X}_p$ に実数 $\boldsymbol{X}_p\boldsymbol{\varPhi}$ を対応させると、接空間 $T_p(M)$ 上の線形汎関数が得られる。これをベクトル値関数 $\boldsymbol{\varPhi}$ の点 p での微分といい、$(d\boldsymbol{\varPhi})_p$ と書くと

$$(d\boldsymbol{\varPhi})_p(\boldsymbol{X}_p) = \boldsymbol{X}_p\boldsymbol{\varPhi}$$

となり、さらに他の線形汎関数 $\boldsymbol{\varXi}$ と実数 α を用いて

$$(\alpha d\boldsymbol{\varPhi})_p(\boldsymbol{X}_p) = \alpha(d\boldsymbol{\varPhi})_p(\boldsymbol{X}_p)$$
$$((d\boldsymbol{\varPhi})_p + (d\boldsymbol{\varXi})_p)\boldsymbol{X}_p = (d\boldsymbol{\varPhi})_p\boldsymbol{X}_p + (d\boldsymbol{\varXi})_p\boldsymbol{X}_p$$

と定義することで線形汎関数の全体は一つのベクトル空間 (線形空間) をつくる。このベクトル空間は $T_p(M)$ の双対 (余接) 空間 $T_p^*(M)$ となる。接ベクトルの自然基底 $\left\{\partial/\partial\boldsymbol{x}^i\right\}$ の双対基底は $\left\{d\boldsymbol{x}^i\right\}$ で表され、$d\boldsymbol{x}^i\left(\partial/\partial\boldsymbol{x}^j\right) = \delta^i_j$ である。以後、$\partial/\partial\boldsymbol{x}^j$ を ∂_j と略記する。

k 次元微分可能多様体 N を、$0 \leqq k \leqq n$ として n 次元微分可能多様体 M に埋め込みをすることによって、k 次元の部分多様体 M_s と M_s 上の全て

の点における接空間に対応する $n-k$ 次元の双対（余接）空間 $T_p^*(M_s)$ を考えることにする。M_s 上の一次独立な接ベクトル場を $(X_1,\cdots,X_k)$ としたとき、

$$\mathfrak{F}(p) = span\{X_1(p),\cdots,X_k(p)\}$$

は M_s 上の点 p の k 次元接 (ベクトル) 空間 $T_p(M)$ となり、$\boldsymbol{R}^n$ の部分空間である。この接 (ベクトル) 空間の場 $\boldsymbol{F}_s$、すなわち $\mathfrak{F}(p)$、$\forall p\in M_s$ を M_s 上の k 分布 (**distribution**) という。この接 (ベクトル) 空間場が M_s 上の全ての点 $\forall p\in M_s$ で次数が一定であるとき正則という。M_s の開集合 U_s における接ベクトル場の接ベクトル $\boldsymbol{X}_s$ が U_s に含まれる滑らかな曲線 $f(\boldsymbol{x}_s(t))$ の各点における接ベクトルと一致するとき、$f(\boldsymbol{x}_s(t))$ を $\boldsymbol{X}_s$ の積分曲線といい、M_s 上の点 p の接 (ベクトル) 空間が $F_s(p)$ に含まれるならば、M_s は F_s の積分多様体という。

接ベクトル場の交換子積が

$$[X_i,X_j](p)\in F_s(p)$$

ならば対合的 (**involtive**) であるといい、対合的であれば Frobenius 積分可能定理より、F_s は積分可能であるから F_s の積分多様体が存在する。しかし、その全体 ζ は一般に M 上で連結でなく、k 次元葉層構造をなす。そして ζ の連結成分の集合を葉 (葉体) という。葉は F_s の極大積分多様体である。

厳密な線形化法には、入出力厳密線形化法と状態空間厳密線形化法 (付録 1 参照) があり、入出力線形化によって線形化されなかった部分系の動特性を内部ダイナミクスといい、入力によって不可観測な状態になっている内部ダイナミクスを零ダイナミクスという [44),45)]。

群であり演算が正則かつ解析的である解析多様体を Lie 群 という。Lie 群には M 上の全ての点で接 (ベクトル) 空間が存在するから、接ベクトルの交換子積を乗法として定義すると Lie 環（Lie 代数）になる。次に Lie 微

分について定義しておく。[46)]

反変ベクトル v^i の Lie 微分 $\boldsymbol{\varepsilon}$ を無限小パラメータとして、無限小点変換を

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^i = \boldsymbol{x}^i + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\xi}^i(\boldsymbol{x})$$

とし、v^i の引きずりを

$$\bar{v}^i(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} v^j(\bar{\boldsymbol{x}})$$

で表したとき、v^i の ξ^j の方向微分は

$$L_{\xi^j} v^i = \lim_{\boldsymbol{\varepsilon}\to 0} \frac{\bar{v}^i(\boldsymbol{x}) - v^i(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\xi^j, v^i] = \xi^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} v^j$$

となる。これをベクトル表示すると

$$L_\xi \boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{v}] = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\xi} - \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{v}$$

と書ける。ベクトルとスカラーの Lie 微分を区別して $L_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{v}$ を $D_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{v}$ と書くこともある。

スカラー関数の Lie 微分 $f(\boldsymbol{x})$ の ξ^j 方向の Lie 微分は

$$L_{\xi^j} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\xi}^j \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

これをベクトル表示すると

$$L_\xi f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\xi}$$

となる。そして Lie 代数の元 $\{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\}$ に、写像

$$ad_X \boldsymbol{Y} = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]$$

を定義する。

n 次元微分可能多様体 M 上の曲線 $\boldsymbol{x}$ を局所 n 次元 Euclid 空間に展開し

た曲線を $\boldsymbol{x}(x^1,\cdots,x^n)$ で表すと、接（ベクトル）空間のアフィン接続は基底を $[\partial_1,\cdots,\partial_n]$ で表したとき

$$d\boldsymbol{x} = dx^i\partial_i \qquad d\partial_i = \mathit{\Gamma}_{ij}^k dx^j\partial_k$$

で与えられる。これより軌道を求めるには次の連立微分方程式を解けばよい。

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \dfrac{dx^i}{dt}\partial_i \\ \\ \dfrac{d\partial_i}{dt} = \mathit{\Gamma}_{ij}^k(\boldsymbol{x})\partial_k\dfrac{dx^j}{dt} \end{cases}$$

ファイバーとは多様体 M 上で、ある関係で定まる同値類に属する点集合であって、前述の葉はその一例である。ファイバーを f_p と記すと、底空間 M の点 p の近傍を U_p で表したとき $f_p \times U_p$ を底空間全域にわたって貼り合わせたものをファイバーバンドルという。接ベクトルは制御に関しても重要な不変量であり、M 上の点 p の接（ベクトル）空間を $T_p(M)$ としたとき、$T(M) = \cup_{p\in M}T_p(M)$ を接ベクトルバンドルという。このとき、ファイバーは $\boldsymbol{R}^n$ である。

いま、$\mathfrak{R}$ を単位元 1 をもつ可換環とする。$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z} \in F$ と $f,g \in \mathfrak{R}$ に対して $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y} \in F, f\boldsymbol{X} \in F$ を定義し

(1) $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}$

(2) $\boldsymbol{X}+(\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Z}) = (\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})+\boldsymbol{Z}$

(3) $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{X}$

(4) $\boldsymbol{X}+(-\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{0}$

(5) $f(g\boldsymbol{X}) = (fg)\boldsymbol{X}$

(6) $f(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) = f\boldsymbol{X}+f\boldsymbol{Y}$

(7) $(f+g)\boldsymbol{X} = f\boldsymbol{X}+g\boldsymbol{X}$

(8) $1\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}$

が成立するとき、F を $\mathfrak{R}$ 加群という。$\mathfrak{R}$ 加群 F において F の二元 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ に積 $\boldsymbol{XY} \in F$（閉包性）が定義され、F が環で $f(\boldsymbol{XY}) = (f\boldsymbol{X})\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}(f\boldsymbol{Y})$ が成立するとき、F は $\mathfrak{R}$ 多元環、$\mathfrak{R}$ が実数体 $\boldsymbol{R}$ のとき $\boldsymbol{R}$ 多元環という。多様体 M 上の C^∞ 関数環 f は $\boldsymbol{R}$ 多元環である。

次に、古典的なテンソルの説明をしておく。

実ベクトル空間を $\boldsymbol{V}$ とし、その双対空間を $\boldsymbol{V}^*$ とする。$\boldsymbol{V}$ の p 個と $\boldsymbol{V}^*$ の q 個の直積を実空間に写像する関数 T

$$T : \boldsymbol{V}_1^* \times \cdots \times \boldsymbol{V}_q^* \times \boldsymbol{V}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{V}_p \to \boldsymbol{R}$$

があって、$\boldsymbol{V}^*$ の基底を $\{\boldsymbol{\omega}^1, \cdots, \boldsymbol{\omega}^q\}$、$\boldsymbol{V}$ の基底を $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p\}$ としたとき、$T(\boldsymbol{\omega}^1, \cdots, \boldsymbol{\omega}^q, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p)$ が各変数について線形関数となるとき、T を (p,q) テンソルという。$p=0$ ならば q 階共変テンソル、$q=0$ ならば p 階反変テンソル、$p \neq 0, q \neq 0$ ならば混合テンソルという。(p,q) テンソル $T_q^p(V)$ が $\sum T_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} \boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_p} \otimes \boldsymbol{\omega}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\omega}^{j_q}$ で表されるとき $T_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p}$ を $T_q^p(V)$ の成分という。T の上に付けられた添字を反変指標、下に付けられた添字を共変指標という。テンソル演算において総和記号 $\sum$ の後に同じ指標が対になって表れたとき Einstein の規約により総和記号を省略する。

Lebesgue 積分では、単調関数列（単関数も含めて）

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

について積分する。ここに、$f_n(x)$ は有界な可測関数とする。
Lebesgue 積分した関数を $F(x)$ で表すと

$$F(x) = (L)\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} (L)\int_0^x f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$$

となる。

本書では、各 $F_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は滑らかな関数を扱うが、Dini 微分可能な連続関数であればよい。Lebesgue 積分、Dini 微分、Riesz の定理等

は、非線形問題に欠かせない数学的ツールである。

1.3　記号の説明

I は単位行列、記号右上の T は転置、記号右上の指標は反変指標、記号右下の指標は共変指標、$\otimes$ は Kronecker 積、$\times$ は直積、(　) の右上の数は累乗を示す指数、$\boldsymbol{X}^{[k]}$ は $\boldsymbol{X}$ の k 回の kronecker 冪、det( ) は行列式、{ } は集合、$<\ >$ は内積、$\boldsymbol{R}^n$ は n 次元実数空間、E^n は n 次元 Euclid 空間、記号上の $\cdot$ は時間微分、$sym[\quad]$ テンソル行列の完全対称化、M は多様体、M_s は部分多様体、$\|\ \|$ は絶対値ノルム、$\|\ \|_\varepsilon$ は Euclid ノルム、$\lambda(\boldsymbol{A})$ は行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値、n は状態ベクトルの次元、m は制御ベクトルの次元、そして、l は出力ベクトルの次元、小文字の太字はベクトル、大文字の太字は行列、細字はスカラ、積分記号の前の (L) は Lebesgue 積分を意味する。

1.4　定義

多変数の多項式形非線形関数を陽に表現し、その積や微分等の演算を容易にする手法としてテンソル行列表現が考えられる。Euclid 空間ではテンソルの成分は定数であるが、微分可能多様体ではベクトル $\boldsymbol{x}$ の関数である。したがって、ここで言うテンソルとはテンソル解析におけるテンソルとは異なり、必ずしも座標変換と結びついた概念ではない。即ち単に上付き、下付き等の指標を持った量をテンソルと称しているに過ぎない。正確には「テンソル記法により表現される量」と言うべきであるが、便宜上「テンソル」という言葉を用いる。本書では「テンソル」の行列表現を用い、上付き指標 (テンソルの場合と同様に反変指標とよぶ) は行列の列に対応させ、下付き指標 (テンソルの場合と同様に共変指標とよぶ) は行に対応させるものとする。理解を容易にするため「テンソル」(テンソル記法) の定義とそ

の行列表現およびその演算について定義する。

定義 1　反変テンソル記法

n 個の要素 $\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \cdots, \boldsymbol{a}^n$ を成分としてもつ物理量を 1 階の「反変テンソル」と定義し、これを $\boldsymbol{a}^i$ と略記する。i は 1 から n までを代表するものであり、反変指標という。ここに、n は 1 階反変の「テンソル」の次元である。n^2 個の要素 $\boldsymbol{a}^{11}, \boldsymbol{a}^{12}, \cdots, \boldsymbol{a}^{1n}, \boldsymbol{a}^{21}, \cdots, \boldsymbol{a}^{2n}, \cdots, \boldsymbol{a}^{n1}, \cdots, \boldsymbol{a}^{nn}$ を成分としてもつ物理量を 2 階の「反変テンソル」といい、これを $\boldsymbol{a}^{ij}$ と略記する。3 階、4 階、$\cdots$ の「反変テンソル」も同様に定義される。

定義 2　共変テンソル記法

n 個の要素 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を成分としてもつ物理量を 1 階「共変テンソル」と定義する。2 階,3 階,$\cdots$ の「共変テンソル」についても同様に定義される。「反変テンソル」と「共変テンソル」の区別は後述の定義 4 において明らかにする。

定義 3　混合テンソル記法

$\boldsymbol{a}_1^1, \boldsymbol{a}_2^1, \cdots, \boldsymbol{a}_n^n$ を 2 階「混合 (1 階反変—1 階共変) テンソル」または (1,1)—「テンソル」と定義する。同様にして $\boldsymbol{a}_{11}^1, \boldsymbol{a}_{12}^1, \cdots, \boldsymbol{a}_{nn}^n$ を (1,2)—「テンソル」という。

定義 4「テンソル」の行列表示

1 階「反変テンソル」$\boldsymbol{a}^i$ の行列は $n \times 1$ 行列 $[\boldsymbol{a}^i] = [\boldsymbol{a}^1 \boldsymbol{a}^2 \cdots \boldsymbol{a}^n]^{\mathrm{T}}$ で表示する。2 階「反変テンソル」$\boldsymbol{a}^{ij}$ の行列表示は $[a^{ij}] = [\boldsymbol{a}^{11} \boldsymbol{a}^{12} \cdots \boldsymbol{a}^{1n} \boldsymbol{a}^{21} \cdots \boldsymbol{a}^{2n} \cdots \boldsymbol{a}^{nn}]^{\mathrm{T}}$ なる $n^2 \times 1$ 行列とする。3 階、4 階、$\cdots$ の「反変テンソル」は同様に $n^3 \times 1, n^4 \times 1, \cdots$ なる行列で表示される。これに対して、「共変テンソル」は 1 階、2 階、$\cdots$ に対応してそれぞれ $1 \times n, 1 \times n^2, \cdots$ なる行列表示をするものとする。また、$\boldsymbol{a}_{klm}^{ij}$ のような「混合テンソル」は $n^2 \times n^3$ 行列で表示するものとする。したがって、$[\boldsymbol{a}_j^i]$ は通常の $n \times n$ 正方行列と

なる。

定義 5　「完全対称テンソル」と「テンソル」の完全対称化

「反変対称テンソル」とは反変指標間で指標を交換した要素が互いに等しい「テンソル」、「共変対称テンソル」とは共変指標間で指標を交換した要素が等しい「テンソル」、「完全対称テンソル」とは反変指標間、共変指標間、および反変指標と共変指標相互の間で指標を交換した要素が等しい「テンソル」である。そして、「テンソル」のある要素に対して、その指標を交換した要素を対称要素 (対称部分) ということにする。以上のことを (2,3)—「テンソル」を、例にとって説明すると、要素 $\boldsymbol{a}^{ij}_{klm}, \boldsymbol{a}^{kj}_{ilm}, \boldsymbol{a}^{im}_{kjl}, \cdots$ 等のように反変、共変の区別なく指標を交換して得られる要素が対称要素である。反変対称要素が等しいとき、すなわち $\boldsymbol{a}^{ij}_{klm} = \boldsymbol{a}^{ji}_{klm}$ のとき、その「テンソル」は「反変対称テンソル」であり、「共変対称テンソル」も同様に示される。全ての対称要素が等しいとき、その「テンソル」は「完全対称テンソル」とよぶ。

完全対称化とは、完全対称でないテンソル行列の対称要素の総和をその個数で除したもので、それらの対称要素を置き換え、この操作を対称関係で得られる全ての組について行うことを完全対称化という。例えば (1,1)—「テンソル」の行列表示したものを $[a^i_j] = \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{bmatrix}$ としたとき、完全対称化した行列を $[b^i_j] = \begin{bmatrix} b^1_1 & b^1_2 \\ b^2_1 & b^2_2 \end{bmatrix}$ と表すと、要素 a^i_j と b^i_j の間には次の関係が成立する。

$$b^1_1 = a^1_1,\ b^1_2 = b^2_1 = \frac{1}{2}(a^1_2 + a^2_1),\ b^2_2 = a^2_2$$

また、$(2, l-2)$—テンソル行列 $[a^{j_1 j_2}_{j_3 j_4 \cdots j_l}]$ の場合、完全対称化された要素を $b^{j_1 j_2}_{j_3 j_4 \cdots j_l}$ とすると

$$b^{j_1 j_2}_{j_3 j_4 \cdots j_l} = \frac{1}{l!} \sum_{(j_1 \cdots j_l)} a^{j_1 j_2}_{j_3 j_4 \cdots j_l}$$

で与えられる。ここで $\displaystyle\sum_{(j_1\cdots j_l)}$ と書いたのは、あらゆる順列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & l \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_l \end{pmatrix}$ についての総和を意味する。

定義 6　テンソル行列の転置

(l,m)—テンソル行列 $[a^{i_1\cdots i_l}_{j_1\cdots j_m}]$ の転置とは (m,l)—テンソル行列 $[b^{j_1\cdots\quad j_m}_{i_1\cdots\quad i_l}]$ であって、要素 $a^{i_1\cdots i_l}_{j_1\cdots j_m}$ と $b^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_l}$ が等しいものである。

定義 7　対称和等号

2 つの同じ型のテンソル行列 $[a^{i_1\cdots i_l}_{j_1\cdots j_m}]$, $[b^{i_1\cdots i_l}_{j_1\cdots j_m}]$ において、各々の対称要素の総和が互いに等しいとき、対称和等号の関係にあるといい、

$$[a^{i_1\cdots i_l}_{j_1\cdots j_m}] \sim [b^{i_1\cdots i_l}_{j_1\cdots j_m}]$$

と表す。これは、また

$$[a^{i_1\cdots i_l}_{j_1\cdots j_m}] - [b^{i_1\cdots i_l}_{j_1\cdots j_m}] = [a^{i_1\cdots i_l}_{j_1\cdots j_m} - b^{i_1\cdots i_l}_{j_1\cdots j_m}] \sim \mathbf{0}$$

とも表される。

定義 8　零テンソル行列

要素が全て零よりなるテンソル行列を零テンソル行列という。

定義 9　微分

次の微分を定義する。

$\boldsymbol{x}$ を (1,0)—テンソル行列、すなわち反変ベクトルとし、スカラー関数 f

の $\boldsymbol{x}$ に関する微分を

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

なる反変ベクトルで表す。

また、反変ベクトル $\boldsymbol{y} = [y^1 y^2 \cdots y^l]^{\mathrm{T}}$ の $\boldsymbol{x}$ に関する微分を

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y^l}{\partial x^1} & \frac{\partial y^l}{\partial x^2} & \frac{\partial y^l}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

なるテンソル行列で表す。これより

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}} = \boldsymbol{I}$$

である。

定義 10　テンソル行列の Kronecker 積

行列 $\boldsymbol{A}$ を $[a^{i_1}_{j_1}] = \begin{bmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_d \\ \vdots & & \\ a^h_1 & \cdots & a^h_d \end{bmatrix}$，行列 $\boldsymbol{B}$ を $[b^{i_2}_{j_2}] = \begin{bmatrix} b^1_1 & \cdots & b^1_k \\ \vdots & & \\ b^l_1 & \cdots & b^l_k \end{bmatrix}$