

## まえがき

本書は、一橋大学で2014～2016年度に開講した線型代数IA、IBの授業(90分×15回)のレクチャーノートを大幅に加筆修正したものである。

タイトルを「線型代数+ $a$ 」としたのは、コラムとして言語学や心理学、認知科学に登場するアイデアを紹介したからである。

実際、数学は特殊な分野なので習得するには発想の転換・言語を用いた認知のしくみ・人間の脳の性質など幅広い知識があるとよい。大学数学の入門である線型代数にさえ、そのエッセンスがぎゅっと詰まっている。

最後に、草稿を丹念に読んで間違いを指摘してくれた学生のみなさんと、編集作業を手伝って下さった佐藤守さんに感謝したい。

2017年 1月30日

小林 雅人



# 線型代数 + $\alpha$

## 目次

まえがき	i
<b>第1章 ベクトルと行列</b>	<b>1</b>
1.1 線型代数とは？	1
1.2 ベクトル	2
1.3 ベクトルの代数	3
1.4 行列	4
1.5 行列の代数	6
1.6 行列と方程式	7
1.7 転置行列	7
1.8 三角行列	8
1.9 演習問題	9
1.10 演習問題解答	11
1.11 コラム：チャンクと抽象度	12
<b>第2章 内積と外積</b>	<b>13</b>
2.1 ベクトルの大きさ	13
2.2 単位ベクトル	14
2.3 内積	15
2.4 コーシー・シュワルツの不等式	16
2.5 ベクトルのなす角	17
2.6 外積	18
2.7 外積と平行四辺形	20
2.8 演習問題	21
2.9 演習問題解答	22
<b>第3章 諸定理</b>	<b>24</b>
3.1 三角不等式	24
3.2 一次独立性	25
3.3 グラム・シュミットの直交化法	27

---

3.4	ピタゴラスの定理 . . . . .	30
3.5	演習問題 . . . . .	32
3.6	演習問題解答 . . . . .	34
3.7	コラム：不完全恐怖 . . . . .	35
<b>第4章</b>	<b>行列の積：基礎</b>	<b>36</b>
4.1	行列の積 . . . . .	36
4.2	単位行列 . . . . .	40
4.3	行列の2次方程式 . . . . .	42
4.4	演習問題 . . . . .	44
4.5	演習問題解答 . . . . .	46
<b>第5章</b>	<b>行列の積：応用</b>	<b>48</b>
5.1	可換性 . . . . .	48
5.2	逆行列 . . . . .	48
5.3	行列のベキ乗 . . . . .	52
5.4	ブラケット積 . . . . .	54
5.5	演習問題 . . . . .	56
5.6	演習問題解答 . . . . .	57
5.7	コラム：先入観は敵、固定概念は悪 . . . . .	58
<b>第6章</b>	<b>行列の変形</b>	<b>59</b>
6.1	行列の基本変形 . . . . .	59
6.2	階段行列 . . . . .	62
6.3	掃き出し法 . . . . .	63
6.4	行列のランク . . . . .	66
6.5	同値類 . . . . .	67
6.6	文字が入る場合 . . . . .	68
6.7	演習問題 . . . . .	69
6.8	演習問題解答 . . . . .	70
6.9	コラム：ジグソーパズル vs ルービックキューブ . . . . .	71
<b>第7章</b>	<b>連立一次方程式：基礎</b>	<b>72</b>
7.1	そもそもの話：連立方程式の解 . . . . .	72
7.2	連立方程式の解法例 . . . . .	74
7.3	連立方程式の解 . . . . .	75
7.4	解の表示法 . . . . .	77

---

7.5	階段行列再考	78
7.6	rank の解釈	79
7.7	演習問題	80
7.8	演習問題解答	81
<b>第 8 章</b>	<b>連立一次方程式：応用</b>	<b>82</b>
8.1	その他の標準形	82
8.2	解の存在条件	83
8.3	同次形の連立方程式	86
8.4	応用：ランクと一次独立性	87
8.5	演習問題	89
8.6	演習問題解答	90
8.7	連立一次方程式まとめ	91
<b>第 9 章</b>	<b>逆行列と基本行列</b>	<b>92</b>
9.1	逆行列	92
9.2	逆行列の計算法 (& 存在判定法)	93
9.3	基本行列	96
9.4	掃き出し法による逆行列の計算	99
9.5	応用：基本行列の積	100
9.6	演習問題	101
9.7	演習問題解答	102
9.8	コラム：上り坂と下り坂	103
<b>第 10 章</b>	<b>行列式</b>	<b>104</b>
10.1	クラメルの公式	104
10.2	行列式	106
10.3	クラメルの公式	107
10.4	コラム：全体像	110
10.5	演習問題	111
10.6	演習問題解答	112
10.7	ニューロンネットワーク	113
<b>第 11 章</b>	<b>行列式の性質</b>	<b>114</b>
11.1	転置不変性	114
11.2	多重線型性	116
11.3	行列式の乗法性	119

---

11.4 演習問題 . . . . .	121
11.5 演習問題解答 . . . . .	123
<b>第 12 章 余因子展開</b> . . . . .	<b>125</b>
12.1 余因子 . . . . .	125
12.2 余因子行列 . . . . .	128
12.3 余因子展開の証明 . . . . .	130
12.4 演習問題 . . . . .	132
12.5 演習問題解答 . . . . .	133
<b>第 13 章 複素数</b> . . . . .	<b>135</b>
13.1 複素数とは? . . . . .	135
13.2 大きさと偏角 . . . . .	138
13.3 三角不等式 . . . . .	140
13.4 応用: 代数学の基本定理 . . . . .	140
13.5 演習問題 . . . . .	142
13.6 演習問題解答 . . . . .	143
13.7 コラム: パラダイムシフト & ゲシュタルトスイッチ . . . . .	144
<b>第 14 章 オイラーの公式</b> . . . . .	<b>145</b>
14.1 幾何学的解釈 . . . . .	145
14.2 回転と複素数 . . . . .	146
14.3 複素数と行列 . . . . .	148
14.4 オイラーの等式 . . . . .	149
14.5 マクローリン級数とオイラーの公式 . . . . .	151
14.6 加法定理とピタゴラスの定理 . . . . .	154
14.7 演習問題 . . . . .	156
14.8 演習問題解答 . . . . .	157
14.9 コラム: システム 1 と 2 . . . . .	158
<b>参考文献</b> . . . . .	<b>159</b>